Contrôle d'Analyse IV du 24 juin 2008
II année EEIGM-ENSGSI ; Enseignant : M. HABOUSSI

Durée : 3 heures
Les documents, autres que les formulaires distribués en cours, et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Trouver les bornes supérieure et inférieure de la fonction définie par $f(x, y) = 3xy - 3x^2 - y^3$ sur le domaine carré de sommets $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ et $(1, 1)$.

Exercice 2

Dans l'espace muni du repère (O, xyz), on considère le champ vectoriel $\overrightarrow{F} = (y^2, -x^2)$
Calculer la circulation de $\overrightarrow{F}$ le long :

a- du segment $[A, B]$ orienté de A vers B avec $A = (1, 0)$ et $B = (0, 1)$.

b- du quart de cercle centré en O passant par A et B.

Que peut-on dire alors de $\overrightarrow{F}$?

Exercice 3

Dans l'espace muni du repère (O, xyz), on considère la surface S paramétrée par :

$$\begin{cases} x = rcost \\ y = rsint \\ z = f(r) \quad (r, t) \in [a, b] \times [0, 2\pi[\;\; 0 < a < b \end{cases} \tag{1}$$

1. Exprimer l'aire de la surface $A(S)$ sous forme d'une intégrale simple.
2. Montrer que $A(S)$ peut se mettre sous la forme $A(S) = 2\pi l(\Gamma)x_G$ où $l(\Gamma)$ et x_G représentent respectivement la longueur et l'abscisse du centre d'inertie G de la courbe Γ d'équation $z = f(x)$.
3. Que représente S lorsque Γ a pour équation $(x - c)^2 + z^2 = R^2 (R < c)$? Déterminer alors $A(S)$.

Exercice4

Dans l'espace rapporté au repère $R = (O, xyz)$, considérons le champ vectoriel $\overrightarrow{F}(M) = k\overrightarrow{OM}$ (k est une constante).

1. Le champ $\overrightarrow{F}(M)$ dérive t-il d'un potentiel scalaire ou vectoriel ? Si oui, donner ce potentiel.

2. Exprimer pour un volume V quelconque de frontière S la formule d'Ostrogradski $\oint_S \overrightarrow{F}(M_S) \cdot d\overrightarrow{\sigma}(M_S) = \int_V div\overrightarrow{F}(M_V)dV$? Montrer qu'il est possible de calculer le volume V à partir d'une intégrale de surface à exprimer. Que représente cette intégrale de surface ?
3. Soit V le volume délimité par une surface fermée constituée d'un cône de révolution autour de l'axe Oz, de sommet O et de demi-angle au sommet $\theta_0 = 60°$, dont la base a la forme d'une calotte sphérique centrée en O.
Vérifier dans ce cas la formule d'Ostrogradski en justifiant toutes les étapes du calcul.

Exercice5

L'espace étant rapporté au repère cartésien $R = (O, xyz)$. Considérons dans le système de coordonnées cylindriques le champ vectoriel $\overrightarrow{F}(M) = \frac{k}{\|\overrightarrow{OH}\|}(\overrightarrow{e}_\rho + \overrightarrow{e}_\varphi) + k\overrightarrow{e}_z$ (k est une constante et $\overrightarrow{OH}$ est la projection de $\overrightarrow{OM}$ dans le plan Oxy).

1. Montrer que $\overrightarrow{F}(M)$ dérive d'un potentiel vecteur que l'on désignera par $\overrightarrow{A}(M)$.
2. Donner l'expression générale de $\overrightarrow{A} = (A_\rho, A_\varphi, A_z)$ si les composantes A_ρ et A_φ ne dépendent pas de z avec A_φ inversement proportionnelle à ρ.